

EXERCICES CHAPITRE 3

Logarithme – Exponentielle – Puissances – $u(x)^{v(x)}$

Remarque : dans les exercices sur les logarithmes, on pensera à utiliser les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

Exercice 3.1

Soit f définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

Déterminer des intervalles I tels que f/I admette une fonction réciproque que l'on déterminera.

Exercice 3.2

Préciser le domaine de définition et calculer les dérivées des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & \text{b) } b(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}} & \text{c) } c(x) = (\cos(x))^{\sin(x)} \\ \text{d) } d(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\left[\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right] & \text{e) } e(x) = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}} & \text{f) } f(x) = \ln[x + \sqrt{a^2 + x^2}] \end{array}$$

Exercice 3.3 (ln – exp - étude de fonctions)

Etudier les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a : x \rightarrow a(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & \text{b) } b : x \rightarrow b(x) = \frac{1}{x(1 + \ln(x))} \\ \text{c) } c : x \rightarrow c(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}} & \text{d) } d : x \rightarrow d(x) = (x-1) \cdot e^{x-1} \\ \text{e) } k_a : x \rightarrow k_a(x) = \frac{x^2}{x+a} e^{\frac{1}{x}} & \text{f) } f : x \rightarrow f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x} \end{array}$$

Exercice 3.4

On considère la famille de fonctions $f_n : x \rightarrow f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-n^2 x}$

- Etudier f_n et tracer la représentation graphique C_n de f_n .
- Déterminer l'équation d'une courbe contenant l'ensemble des points extrêmes des fonctions f_n .
- On pose $M_n = \max \{f_n(x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$. Déterminer $\lim (M_n)$.
- Soit $F_n(A) = \int_0^A f_n(t) dt$. Déterminer $\lim_{A \rightarrow +\infty} F_n(A)$, notée $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$

Exercice 3.5

Soit $a \in]0, +\infty[$. Résoudre :

$$\begin{cases} x \cdot y = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2} \cdot (\ln(a))^2 \end{cases}$$

Exercice 3.6

1°) Résoudre $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

2°) Résoudre $\text{ch}(x) = 2$.

Exercice 3.7 (exercice de révision sur le programme de Terminales)

1°) Soit $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1}$

Etudier les variations de g .

2°) Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 0$ et $f(x) = x \cdot [\ln(x+1) - \ln(x)]$ si $x > 0$.

a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (on pourra poser $x = 1/X$)

d) Etudier les variations de f .

3°) Soit $\alpha > 0$.

a) Calculer $\int_1^\alpha \frac{x}{x+1} dx$. (on pourra poser : $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1}$)

b) Calculer $I(\alpha) = \int_1^\alpha x.[\ln(x+1) - \ln(x)]dx$.

4°) On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \ln(u_n)$.

a) Déterminer le sens de variation de (v_n) et $\lim(v_n)$.

b) Déterminer le sens de variation de (u_n) et $\lim(u_n)$.

Indications : 2°) a) f est continue en 0 ssi : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

2°) b) Etudier la limite du taux d'accroissement $\phi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

2°) d) Penser à utiliser le 1°)

3°) a) Utiliser $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1}$

3°) b) Faire une intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx$$

4°) a) Utiliser la fonction f pour étudier la suite (v_n) .

Fonctions hyperboliques directes

Exercice 3.7

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{t/2} - e^{-t/2}| \geq |t|$. (comparer $\text{sh}(u)$ avec u et conclure)

b) En déduire, pour $x > -1$, $x^2 \geq (1+x).[\ln(1+x)]^2$ (choisir $t = \ln(1+x)$ dans a)

Exercice 3.8

1°) Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ch}(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{sh}(kx)$. (considérer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$)

2°) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \text{ch}(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}(a+kb)$

3°) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{th}(x) = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$

3°) b) En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n 2^k \text{th}(2^k x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.9

1°) Soit $\alpha > 0$ et E_α l'équation : $\text{sh}x = x.\text{ch}\alpha$ ($x > 0$)

a) En étudiant : $x \rightarrow h_\alpha(x) = \text{sh}(x) - x.\text{ch}\alpha$, montrer que (E_α) admet une solution unique notée $p(\alpha)$

b) Etablir : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p(\alpha) = +\infty$ (comparer α et $p(\alpha)$ à l'aide du tableau de variations de h_α)

c) Montrer que : $\forall x \geq 0$, $\text{sh}(x) \geq x$.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n \leq p(n) \leq 2.n$. (utiliser le tableau de variations de h_n et $h_n(2n)$)

Exercice 3.10

a) Vérifier que l'équation de la tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ au point (x_0, y_0) est :

$$x.x_0 + y.y_0 = 1. \text{ (utiliser des équations paramétriques du cercle)}$$

b) Soit (C) la courbe d'équation $y = \text{ch}x$.

Montrer que la tangente en un point M de (C) à la courbe (C) est parallèle à l'une des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ menées du point P , projection orthogonale de M sur $y'y$.

(faire un dessin)

Fonctions réciproques

Exercice 3.11

Simplifier : $\sin(\arccos x)$, $\tan(\arcsin x)$, $\arctan\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$

Exercice 3.12

Résoudre : $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \pi/4$

(on pourra composer par \tan pour trouver des conditions nécessaires)

Exercice 3.13

Résoudre : $\text{Arcsin}(2x/(1+x^2)) = \pi/3$ a) directement b) en posant $x = \tan \alpha$. (avec $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$)

Exercice 3.14

1°) Résoudre : $2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \pi/2$

(on pourra poser $x = \cos^2 \alpha$ avec $\alpha \in [0, \pi/2[$).

2°) Résoudre : $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi$

Exercice 3.15

Montrer que : $\forall x \in [-1, 1[$, $\text{Arccos} x + 2 \cdot \text{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \pi$.

Exercice 3.16

1°) On considère la fonction suivante : $f: x \rightarrow f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

a) Déterminer $\text{def}(f)$, calculer $f'(x)$ quand cela est possible et donner une expression simple de $f(x)$ puis représenter G_f . En quels points f n'est-elle pas dérivable?

b) Simplifier f en posant $x = \tan \alpha$.

Exercice 3.17

1°) Montrer que : $\forall (a, b) \in (]-1, 1[)^2$, $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-a \cdot b}\right)$

2°) Montrer que : $\forall (a, b) \in (]0, +\infty[)^2$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+a \cdot b}\right)$

Exercice 3.18

Simplifier $f(x) = \text{Argth} \sqrt{\frac{\text{ch}(x)-1}{\text{ch}(x)+1}}$

a) en dérivant.

b) en exprimant $\text{ch}(x)$ à l'aide de $\text{ch}(x/2)$ et $\text{sh}(x/2)$.